# 18.Window-CID-CAMによるContact Processの研究(基研研究会「相転移研究の新手法とその応用」,研究会報告)



香取, 真理; 今野, 紀雄

# 18. Window-CID-CAMによるContact Processの研究

東大理・室蘭工大[A] 香取真理，今野紀雄[A]

## §1. Contact Processの臨界現象

Contact Process (CP)[1] は伝染病の伝播の簡単な確率模型である。格子点 $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}^d$ 上の確率変数 $\eta(\boldsymbol{n})$ はおのおの0または1の値をとり，それぞれ健康な人と感染者を表わす。感染者はrate 1で自然治癒するのに対して，健康な人は隣接する格子点上の感染者の数に比例して感染する。いま一人あたりの感染率を $\lambda$ と書くと次のように書けるであろう，

$$\begin{aligned} \eta(\boldsymbol{n}) = 1 \quad &\longrightarrow \quad 0 \qquad \text{at rate } 1 \\ \eta(\boldsymbol{n}) = 0 \quad &\longrightarrow \quad 1 \qquad \text{at rate } \lambda \sum_{\boldsymbol{m}:|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}|=1} \eta(\boldsymbol{m}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

この動的模型において次のような相転移が起こることが，コンピューター・シミュレーション[2] あるいは″高温展開″-Padé近似[3] による研究から予想されている。すなわち，初期状態として $t=0$ ですべての格子点上で $\eta(\boldsymbol{n})=1$ をとり，オーダーパラメーターとして時刻 $t$ での感染者である確率

$$\rho_t(0) = E[\eta(0)] \tag{1.2}$$

を考えると(初期状態及び時間発展のルールがともに並進対称であるため，オーダーパラメーターをどの点で定義しても同じである。ここでは原点0での期待値をとる)，ある臨界値 $\lambda_c$ が存在して，$\lambda \leq \lambda_c$ では $\lim_{t\to\infty} \rho_t(0) = 0$ に対して $\lambda > \lambda_c$ では $\lim_{t\to\infty} \rho_t(0) \neq 0$ となる。$\lambda = \lambda_c$ での臨界現象は，次のように臨界指数 $\{\beta, \Delta, \delta\}$ で記述されるであろう[2,3]

$$\left.\begin{aligned} \lambda < \lambda_c: &\quad \rho_t(0) \sim \exp(-t/\tau) \\ &\qquad\qquad \tau \sim (\lambda_c - \lambda)^{-\Delta} \\ \lambda = \lambda_c: &\quad \rho_t(0) \sim t^{-\delta} \\ \lambda > \lambda_c: &\quad \rho(0) = \lim_{t\to\infty} \rho_t(0) \sim (\lambda - \lambda_c)^{\beta}. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

この伝染病の模型では，感染者が周りの人の状態に依存して治癒したり，また自発的に発病する場合はない。つまり(1.1)のダイナミックスでは詳細つりあいは成立しない。この，動的

イジング模型との違いは，1次元系でもCPにおいては相転移が有限の $\lambda_c$ で起こるという顕著な差違を生む。

次元 $d \geqq 1$ で確かに相転移が存在するという数学的証明はあるが，[1] 現在までのところ，$\lambda_c$や臨界指数の値は1次元においてすら厳密には求められていない。我々は，コヒーレント異常法(CAM)の手法[4] を用いることによって，1次元CPの $\lambda_c$ 及び臨界指数を評価した。[5]

## §2. Window近似

1次元CPを考える。(1.1)の時間発展は，相関関数 $\{\rho_t(n_1, \cdots, n_k)\}$ に対する運動方程式によって記述できる。これは次のような無限に続く連立線形微分方程式である，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(0) &= -(1-2\lambda)\rho_t(0)-2\lambda\rho_t(01)\\
\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(01) &= -2(1+\lambda)\rho_t(01)-2\lambda\rho_t(012)\\
&\quad +2\lambda\rho_t(0)+2\lambda\rho_t(02)\\
\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(02) &= -2\rho_t(02)-2\lambda\rho_t(012)-2\lambda\rho_t(013)\\
&\quad +2\lambda\rho_t(03)+2\lambda\rho_t(01)\\
\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(012) &= -(3+4\lambda)\rho_t(012)-2\lambda\rho_t(0123)\\
&\quad +2\lambda\rho_t(013)+2\lambda\rho_t(01)+2\lambda\rho_t(02) \qquad (2.1)\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

我々は，相関関数をあるルールに従って切断・分割することによって近似を得る方法を提案した。このルールはWindow(窓)を用いた方法と言える。まずWindowの大きさ $w$ を指定する。一つのWindowで張られる領域内におさまる格子点からなる相関関数はそのまま取扱うかわりに，はみ出すものはdecoupling してしまう。例えば $w=3$ の場合には，$\rho_t(013)$ という相関関数は次のように分割される，

$$
\rho_t(013) \longrightarrow \frac{1}{3}\rho_t^{(3)}(0)\rho_t^{(3)}(02)+\frac{2}{3}\rho_t^{(3)}(0)\rho_t^{(3)}(01). \qquad (2.2)
$$

重要な点は，このようなdecouplingの結果(2.1)の無限鎖が有限に分割されることと，元来の線形の方程式が(2.2)のような操作の結果，2次の非線形項を含むようになることである。各近似は，この非線形項のために有限の値 $\lambda_c^{(w)}$ で相転移現象を示すことになる。このようにし

て近似的に得られたオーダーパラメーター $\rho_t^{(w)}(0)$ は，一般に次のような漸近解を持つことが示せる，

$$\rho_t^{(w)}(0) = \rho^{(w)}(0) + \overline{\rho}_c^{(w)} \cdot t^{-\delta_0} \cdot \exp\left(- \frac{t}{\overline{\tau}^{(w)} |\varepsilon(w)|^{-\Delta_0}}\right)$$

（ただし $t \gg 1$），

$$\rho^{(w)}(0) = \begin{cases} 0 & (\varepsilon(w) < 0) \\ \overline{\rho}^{(w)} \cdot \varepsilon(w)^{\beta_0} & (\varepsilon(w) \gtrsim 0), \end{cases}$$

$$\varepsilon(w) = \frac{\lambda - \lambda_c^{(w)}}{\lambda_c^{(w)}}, \qquad (2.3)$$

ここで，

$$\beta_0 = \delta_0 = \Delta_0 = 1. \qquad (2.4)$$

## §3. コヒーレント異常法による解析

(2.4) 式で与えられる臨界指数は，CPについての古典的値と考えられる。(2.3) 式で与えられる臨界係数 $\{\overline{\rho}^{(w)}, \overline{\rho}_c^{(w)}, \overline{\tau}^{(w)}\}$ は，Windowの大きさ $w$ を逐次大きくするとコヒーレント異常を示すと思われる。この発散の漸近形から真の臨界値 $\lambda_c$ と臨界指数を推定する。用いる関係式は

$$\begin{aligned} \overline{\rho}^{(w)} &\sim \delta(w)^{-\varphi_\rho}, \\ \overline{\rho}_c^{(w)} &\sim \delta(w)^{-\varphi_{\rho_c}}, \\ \overline{\tau}^{(w)} &\sim \delta(w)^{-\varphi_\tau}, \end{aligned} \qquad (3.1)$$

および，

$$\begin{aligned} \beta &= 1 - \varphi_\rho \\ \delta &= (1 - \varphi_\rho)/\{1 - (\varphi_\rho - \varphi_{\rho_c})\}. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

ただし，

$$\delta(w) = \frac{\lambda_c - \lambda_c^{(w)}}{\lambda_c} \qquad (3.3)$$

である。

我々は実際に，$w$ を2から11まで変えて計算を実行した結果，1次元CP に対して次のような値を得ることが出来た，

$$\lambda_c \simeq 1.649$$
$$\beta = 0.283 \qquad (3.4)$$
$$\delta = 0.163.$$

また，(2.3)の臨界係数の間に

$$\overline{\tau}^{(w)} = \overline{\rho}_c^{(w)}/\overline{\rho}^{(w)} \qquad (3.5)$$

という関係式が $w$ の値に依らず常に成立することを示し，真の臨界指数の間に

$$\Delta = \delta/\beta \qquad (3.6)$$

というスケーリング関係が成立することを導いた。

## §4. まとめ

CAMはいままで主に磁性体のスピン模型に応用されてきた。これは，CAMが近似理論の列に基づく解析方法であり，スピン模型においてはいわゆる平均場近似が容易に作れるためである。これらの近似は，平衡分布を記述するハミルトニアンの切断と平均場の導入によって得られた。[6]

これに対して，CP では平衡分布がギブス分布では表わせない。別の言い方をすれば，平衡系を記述するために通常用いられるハミルトニアンに対応する量が知られていない。このため，相転移を表わす近似を系統的に構成する新しい方法を考えなければならなかった。

ここでは，相関関数を切断・分割することによって近似を得る手法[7]を提案するとともに，実際にこの方法によって系統的な近似の列を構成してみせた。CAM によって推定された臨界値 $\lambda_c$ 及び臨界係数の値は，シミュレーションや高温展開法によって得られている値[2,3]とほぼ一致している。また，真の臨界指数の間に成立するスケーリング関係をCAM の枠内の議論に基づいて導いてみせた。

今後，高次元のCP あるいは別の確率模型の相転移・臨界現象も，同様の手法によって系統的に解析されるものと期待される。

## 参考文献


1) T. M. Liggett: Interacting Particle Systems (Springer-Verlag, New York, 1985), chapter 6.

2) P. Grassberger and A. de la Torre: Ann. Phys. **122** (1979) 373.

3) R. C. Brower, M. A. Furman and M. Moshe: Phys. Lett. **76B** (1978) 213.

4) M. Suzuki: J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 4205.

5) N. Konno and M. Katori: submitted to Phys. Lett. **A**

6) M. Suzuki, M. Katori and X. Hu: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3092.
   M. Katori and M. Suzuki : J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 3113.

7) M. Suzuki : J. Stat. Phys. **53** (1988) 483.